

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM
HỘI CƠ HỌC VẬT RẮN

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

TUYỂN TẬP CÔNG TRÌNH
HỘI NGHỊ KHOA HỌC TOÀN QUỐC
CƠ HỌC VẬT RẮN
LẦN THỨ XV

Thái Nguyên, ngày 24, 25 tháng 9 năm 2021



TUYỂN TẬP CÔNG TRÌNH
HỘI NGHỊ KHOA HỌC TOÀN QUỐC CƠ HỌC VẬT RẮN LẦN THỨ XV

Thái Nguyên, ngày 24, 25 tháng 9 năm 2021



Sách không bán



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM
HỘI CƠ HỌC VẬT RẮN

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

TUYỂN TẬP CÔNG TRÌNH

Hội nghị Khoa học toàn quốc

Cơ học Vật rắn lần thứ XV

TP. Thái Nguyên, ngày 24 - 25 tháng 9 năm 2021

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
NĂM 2021**

Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XV

TP Thái Nguyên, 24-25/9/2021

© 2021 Nhà xuất bản Đại học Thái Nguyên.

Không phần nào trong xuất bản phẩm này được phép sao chép hay phát hành dưới bất kỳ hình thức hoặc phương tiện nào mà không có sự cho phép trước bằng văn bản của cơ quan chủ quản.

Nhà xuất bản Đại học Thái Nguyên

Địa chỉ : Phường Tân Thịnh – Thành phố Thái Nguyên – Tỉnh Thái Nguyên

Điện thoại liên hệ: (0280) 3.840023 - (0280) 3.601004

Email: nxb.dhtn@gmail.com

Website: <http://nxb.tnu.edu.vn>

Ban Biên tập

Đồng trưởng ban: Đào Huy Bích, Trần Ích Thịnh

Nguyễn Đông Anh, Nguyễn Đăng Bích, Phạm Đức Chính, Nguyễn Thái Chung, Nguyễn Tiến Chương, Nguyễn Mạnh Cường, Nguyễn Văn Đạt, Phạm Tiến Đạt, Nguyễn Đình Đức, Nguyễn Trung Hiếu, Lê Khả Hòa, Đặng Xuân Hùng, Nguyễn Xuân Huy, Nguyễn Tiến Khiêm, Ngô Như Khoa, Nguyễn Đình Kiên, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Việt Khoa, Bùi Hải Lê, Trần Văn Liên, Đào Như Mai, Dương Phạm Tường Minh, Nguyễn Trang Minh, Vũ Hoài Nam, Nguyễn Thị Thanh Nga, Vũ Ngọc Pi, Trần Hữu Quốc, Lê Minh Quý, Nguyễn Hồng Thái, Trương Tích Thiện, Đỗ Văn Trường, Trần Thanh Tuấn, Trần Minh Tú, Hoàng Văn Tùng, Trần Bảo Việt, Phạm Chí Vĩnh

MÃ SỐ: $\frac{02 - 153}{\text{ĐHTN} - 2021}$

Trần Văn Liên và Vũ Ngọc Ánh

Ứng xử của dầm nano có cơ tính biến thiên chịu tải trọng tĩnh 604

Nguyễn Hoàng Linh, Phạm Ngọc Hưng, Nguyễn Văn Hội, Hoàng Ngọc Duy, Nguyễn Minh Sơn, Trần Thế Quang, Vương Văn Thanh, Nguyễn Tuấn Hưng và Đỗ Văn Trường

Ảnh hưởng của biến dạng cơ học đến tính chất sắt điện của vật liệu SrTiO₃ 613

Nguyễn Duy Long, Nguyễn Hồng Thái và Trương Công Giang

Ảnh hưởng của hệ số thiết kế biên dạng rôto đến kích thước và chất lượng làm việc của bơm Roots có biên dạng đỉnh rôto là cung tròn 622

Nguyễn Văn Long, Lê Thanh Hải, Chu Thanh Bình và Trần Minh Tú

Phân tích phi tuyến đáp ứng động của tấm bằng vật liệu FGM rỗng đặt trên nền đàn hồi 632

Giáp Văn Lợi, Nguyễn Duy Văn, Lê Xuân Bách, Nguyễn Tuấn Hưng, Đỗ Văn Trường và Vương Văn Thanh

Tính chất nhiệt điện và quang học của vật liệu đơn lớp GeX (X= S, Se, Te) 642

Nguyễn Văn Luật

Xác định hệ số dẫn hiệu quả của mô hình vật liệu ba pha dạng nền cốt liệu elliptic hai lớp 651

Le Ngoc Ly, Nguyen Thi Phuong, Dang Thuy Dong, Nguyen Van Tien, Nguyen Thi Giang and Tran Quang Minh

Nonlinear axisymmetric vibration of shear deformable FG-GPLRC shallow spherical caps with porous core 658

Đào Như Mai và Cao Văn Mai

Phân tích động lực học sà lan giá búa có neo 667

Nguyễn Xuân Mãn, Trần Tuấn Minh, Nguyễn Thành Nam và A.N.Pankratenco

Trạng thái ứng suất-biến dạng trong khối đá xung quanh công trình ngầm tiết diện lớn khi tỷ số ứng suất nguyên sinh thay đổi 677

Phung Van Minh and Do Van Thom

Dynamic response analysis of nanobeams resting on elastic foundations 688

PHÂN TÍCH PHI TUYẾN ĐÁP ỨNG ĐỘNG CỦA TẤM BẰNG VẬT LIỆU FGM RỖNG ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Nguyễn Văn Long^{1,*}, Lê Thanh Hải², Chu Thanh Bình¹ và Trần Minh Tú¹

¹ Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng

² Khoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh

*Email: longnv@nuce.edu.vn

Tóm tắt. Bài báo này trình bày đáp ứng động lực học phi tuyến của tấm bằng vật liệu rỗng (FGP-functionally graded porous materials) đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Hệ phương trình động lực học phi tuyến được thiết lập trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có kể đến tính phi tuyến hình học von-Kármán. Vật liệu FGP với ba dạng phân bố lỗ rỗng: đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng và các hệ số rỗng thay đổi sẽ được khảo sát. Độ tin cậy của mô hình lý thuyết và chương trình tính đã được kiểm chứng qua so sánh kết quả tính toán với các kết quả đã công bố trên các tạp chí uy tín. Ảnh hưởng của dạng phân bố lỗ rỗng, hệ số rỗng của vật liệu FGP, tham số kích thước hình học, nền đàn hồi đến đáp ứng động lực học của tấm FGP được đánh giá thông qua các ví dụ số.

Từ khóa: Đáp ứng động lực học, phân tích phi tuyến, vật liệu FGP, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, nền đàn hồi.

1. Mở đầu

Là một loại vật liệu nhẹ, có các lỗ rỗng (pores) thay đổi tròn và liên tục theo tọa độ không gian của vật liệu, vật liệu rỗng (FGP-functionally graded porous materials) được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp như: hàng không vũ trụ, đóng tàu, giao thông vận tải, xây dựng dân dụng... Do có khả năng hấp thụ năng lượng tốt nên loại vật liệu này được sử dụng để chế tạo những bản sàn, tấm tường cách âm, cách nhiệt, chế tạo những cấu kiện chịu được tải trọng va chạm. Vì vậy, việc tìm hiểu ứng xử cơ học của kết cấu sử dụng loại vật liệu này, thu hút được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước trong thời gian gần đây.

Có nhiều phân tích tuyến tính ứng xử tĩnh và động của kết cấu dầm, tấm, vỏ bằng vật liệu FGP đã được thực hiện chứng tỏ mỗi quan tâm không hề nhỏ của giới học thuật về chủ đề này [1-5]. Để mô tả sát thực tế hơn ứng xử của kết cấu khi chịu lực, để ý đến sự thay đổi độ cứng kết cấu dưới tác dụng của tải trọng, phân tích phi tuyến là một hướng nghiên cứu được lựa chọn. Xét đến tính phi tuyến hình học, có khá nhiều công bố về uốn, dao động và ổn định của kết cấu FGP [6-9]. Do có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến nên các hệ thức quan hệ và các phương trình chủ đạo trở nên cồng kềnh hơn, lời giải hiển theo tiếp cận giải tích chính vì thế cũng khó nhận được. Một trong những kỹ thuật để vượt

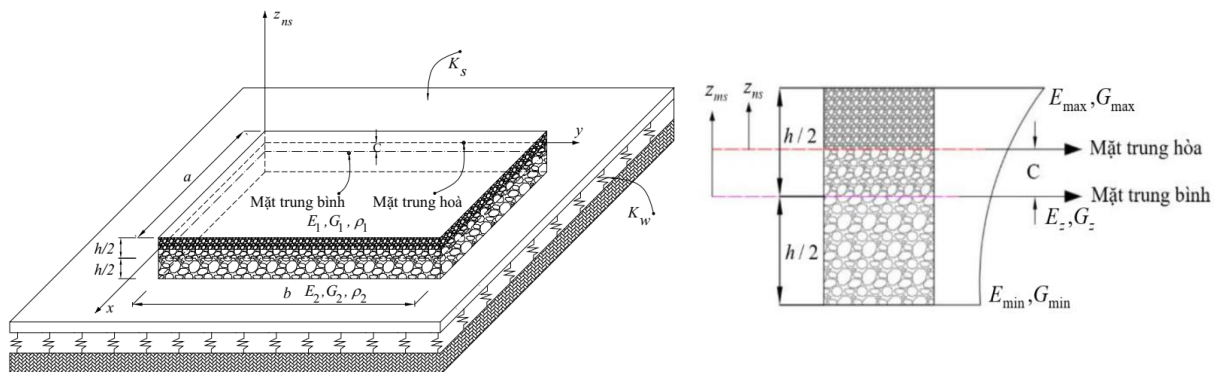
qua những khó khăn này là sử dụng hệ quy chiếu đi qua mặt trung hòa để tính toán. Khác với cách tính thông thường lấy hệ tọa độ đi qua mặt trung bình hình học của kết cấu, cách chọn hệ trục tính toán đi qua mặt trung hòa sẽ làm triệt tiêu tương tác màng - uốn trong quan hệ nội lực - biến dạng, kết quả là các phương trình chủ đạo nhận được đơn giản hơn. Zhang [10] phân tích phi tuyến ứng xử uốn, dao động và sau ổn định của dầm FGM theo lý thuyết dầm bậc cao bằng phương pháp giải tích. She và cs. [11] phân tích ổn định và sau ổn định nhiệt của dầm FGM có gắn lớp vật liệu áp điện cũng theo lý thuyết dầm bậc cao bằng phương pháp Ritz. Babaei và cs. [12] phân tích ổn định và sau ổn định nhiệt của dầm FGM có vi bọt rỗng, có xét đến yếu tố không hoàn hảo hình học ban đầu sử dụng kỹ thuật hàm phạt. Kim và Lee [13] phân tích phi tuyến đẳng hình học tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Hải và cs. [14] phân tích phi tuyến tĩnh tấm FGP đặt trên nền đàn hồi theo tiếp cận chuyển vị.

Phân tích đáp ứng động phi tuyến của tấm FGM hoàn hảo và tấm FGM có vi bọt rỗng đã được một số tác giả thực hiện [15-17], tuy nhiên đối với tấm FGP (metal foam) thì cho đến bây giờ chưa có nghiên cứu nào được công bố. Trên cơ sở đó, trong bài báo này, với tiếp cận giải tích các đặc trưng động lực học của tấm FGP sẽ được khảo sát. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), sử dụng hàm ứng suất Airy kết hợp với phương pháp Galerkin, hệ phương trình phi tuyến nhận được khi tính toán trên hệ tọa độ qui chiếu đi qua mặt trung hòa sẽ cho phép khảo sát đáp ứng động phi tuyến của tấm chữ nhật FGP bốn biên tựa khớp. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu rỗng, nền đàn hồi và tần số lực cưỡng bức đến đáp ứng động lực học của tấm sẽ được đánh giá.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Vật liệu FGP – vị trí mặt trung hòa

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu FGP có chiều dài a , chiều rộng b và chiều dày h như Hình 1. Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các hệ số nền: K_w - hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness), K_s - hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).



Hình 1. Mô hình tấm chữ nhật FGP trên nền đàn hồi

Mô đun đàn hồi kéo-nén và mô đun đàn hồi trượt của vật liệu FGP biến thiên liên tục theo chiều dày tấm phụ thuộc vào hệ số rỗng và quy luật phân bố lỗ rỗng [3, 18]:

- Phân bố đều:

$$\{E, G\} = \{E_{\max}, G_{\max}\} (1 - e_0 \lambda); \quad \rho = \rho_{\max} \sqrt{1 - e_0 \lambda} \quad (1)$$

- Phân bố không đều – đối xứng:

$$\{E(z), G(z)\} = \{E_{\max}, G_{\max}\} \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_{\max} \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (2)$$

- Phân bố không đều – bất đối xứng:

$$\{E(z), G(z)\} = \{E_{\max}, G_{\max}\} \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_{\max} \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (3)$$

trong đó: $\lambda = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2$; $E_{\max}, G_{\max}, \rho_{\max}$ và $E_{\min}, G_{\min}, \rho_{\min}$ lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng. Hệ số Poisson ν được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều dày.

Các hệ số rỗng được xác định bởi:

$$e_0 = 1 - \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = 1 - \frac{G_{\min}}{G_{\max}}; \quad e_m = 1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (0 < e_0, e_m < 1) \quad (4)$$

Vị trí mặt trung hòa của tấm FGP trong trường hợp phân bố bất đối xứng không trùng mặt trung bình, được xác định từ điều kiện [19]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (z - C) E(z) dz = 0 \Rightarrow C = \left[\int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz \right] / \left[\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz \right] \quad (5)$$

2.2. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất – các phương trình chuyển động

Sử dụng khái niệm mặt trung hòa, các thành phần chuyển vị u, v, w của điểm bất kỳ có tọa độ (x, y, z_{ns}) trong không gian tám biểu diễn dưới dạng [20]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}, t) &= u_0(x, y, t) + z_{ns} \theta_x(x, y, t); & v(x, y, z_{ns}, t) &= v_0(x, y, t) + z_{ns} \theta_y(x, y, t); \\ w(x, y, z_{ns}, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó: t là biến thời gian; u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung hòa theo các phương x, y, z_{ns} ; θ_x, θ_y là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung hòa quanh hai trục y, x .

Các thành phần biến dạng có kể đến thành phần phi tuyến hình học von Kármán thể hiện như dưới đây [20]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

trong đó: $\varepsilon_x^0 = u_{0,x} + \frac{w_{0,x}^2}{2}$; $\varepsilon_y^0 = v_{0,y} + \frac{w_{0,y}^2}{2}$; $\gamma_{xy}^0 = u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}$; $\kappa_x = \theta_{x,x}$;
 $\kappa_y = \theta_{y,y}$; $\kappa_{xy} = \theta_{x,y} + \theta_{y,x}$; $\gamma_{xz}^0 = w_{0,x} + \theta_x$; $\gamma_{yz}^0 = w_{0,y} + \theta_y$.

Dấu (.) đi kèm các thành phần chuyển vị chỉ đạo hàm riêng theo biến tương ứng.

Vật liệu FGP được coi là đàn hồi tuyến tính, quan hệ ứng suất – biến dạng được viết dưới dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

với: $Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2}$; $Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1-\nu^2}$; $Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}$.

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm ta nhận được các thành phần nội lực:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_c \begin{bmatrix} A_{66} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

trong đó: hệ số hiệu chỉnh cắt được lấy $k_c = 5/6$; $A_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2}$; $A_{12} = \nu A_{11}$; $A_{66} = \frac{E_1}{2(1+\nu)}$;

$$D_{11} = \frac{E_3}{1-\nu^2}; \quad D_{12} = \nu D_{11}; \quad D_{66} = \frac{E_3}{2(1+\nu)}; \quad (E_1, E_3) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} E(z_{ns})(1, z^2) dz_{ns}.$$

Sử dụng lý thuyết FSDT, các phương trình chuyển động của tấm FGP đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng uốn phân bố q tác dụng lên mặt trên tấm [20]:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\theta}_x; \quad N_{xy,x} + N_{y,y} = I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \ddot{\theta}_y; \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} + N_x w_{0,xx} + 2N_{xy} w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} - K_w w_0 + K_s (w_{0,xx} + w_{0,yy}) \\ &+ q = I_0 \ddot{w}_0 + 2\varepsilon I_0 \dot{w}_0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_{xz} = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\theta}_x; \quad M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{yz} = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\theta}_y$$

trong đó: các mô men quán tính $I_i = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \rho(z_{ns}) z_{ns}^i dz_{ns}$; ($i=0,1,2$); ε là hệ số cản nhớt

tuyến tính.

Sử dụng hàm ứng suất Airy $\varphi(x, y)$ được định nghĩa dưới dạng:

$$N_x = \varphi_{,yy}; \quad N_y = \varphi_{,xx}; \quad N_{xy} = -\varphi_{,xy} \quad (11)$$

Thay (11) vào hai phương trình đầu tiên trong (10) dẫn đến:

$$\ddot{u}_0 = -\frac{I_1}{I_0} \ddot{\theta}_x; \quad \ddot{v}_0 = -\frac{I_1}{I_0} \ddot{\theta}_y \quad (12)$$

Thay (11) và (12) vào ba phương trình còn lại của (10); đồng thời biểu diễn các quan hệ giữa mô men, lực cắt theo chuyển vị, ta được:

$$\begin{aligned} & k_c A_{66} (w_{0,xx} + w_{0,yy} + \theta_{x,x} + \theta_{y,y}) + \varphi_{,yy} w_{0,xx} - 2\varphi_{,xy} w_{0,xy} + \varphi_{,xx} w_{0,yy} \\ & - K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy} + q = I_0 \ddot{w}_0 + 2\varepsilon I_0 \dot{w}_0; \\ & -D_{11} \left[\theta_{x,xx} + \frac{1-\nu}{2} \theta_{x,yy} + \frac{1+\nu}{2} \theta_{y,xy} \right] + k_c A_{66} (w_{0,x} + \theta_x) = \left(\frac{I_1^2}{I_0} - I_2 \right) \ddot{\theta}_x; \\ & -D_{11} \left[\frac{1-\nu}{2} \theta_{y,xx} + \theta_{y,yy} + \frac{1+\nu}{2} \theta_{x,xy} \right] + k_c A_{66} (w_{0,y} + \theta_y) = \left(\frac{I_1^2}{I_0} - I_2 \right) \ddot{\theta}_y \end{aligned} \quad (13)$$

Mặt khác, phương trình tương thích biến dạng có dạng sau [21, 22]:

$$\varepsilon_{x,yy}^0 + \varepsilon_{y,xx}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} \quad (14)$$

Từ (9) và (11), có thể biểu diễn các thành phần biến dạng theo nội lực, sau đó là hàm ứng suất; thay vào (14), ta được:

$$\left(\varphi_{,xxx} + 2\varphi_{,xyy} + \varphi_{,yyy} \right) / E_1 = w_{0,xy}^2 - w_{0,xx} w_{0,yy} \quad (15)$$

Hệ bốn phương trình gồm (13) và (15) là hệ phương trình chủ đạo để phân tích dao động phi tuyến tấm FGP dưới tác dụng của tải cường bức vuông góc với bề mặt tấm.

3. Phân tích dao động phi tuyến

Trong bài báo này, xét tấm chữ nhật FGP liên kết khớp 4 cạnh, dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q(t)$. Các điều kiện biên của bài toán thể hiện như sau:

$$\text{Tại } x = 0, a: v_0 = w_0 = \theta_y = N_x = M_x = 0; \quad \text{tại } y = 0, b: u_0 = w_0 = \theta_x = N_y = M_y = 0 \quad (16)$$

Chọn dạng nghiệm Navier để thỏa mãn các điều kiện biên trong (16):

$$w_0 = W(t) \sin \alpha x \sin \beta y; \quad \theta_x = \Phi_x(t) \cos \alpha x \sin \beta y; \quad \theta_y = \Phi_y(t) \sin \alpha x \cos \beta y \quad (17)$$

trong đó $\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}$; $m, n = 1, 2, 3, \dots$; W, Φ_x, Φ_y là biên độ của độ võng và góc xoay.

Thay (17) vào (15), ta được:

$$\nabla^4 \varphi = \frac{E_1}{2} \alpha^2 \beta^2 W^2(t) (\cos 2\alpha x + \cos 2\beta y) \quad (18)$$

Nghiệm của phương trình (18) có dạng:

$$\varphi = A_1 W^2(t) \cos 2\alpha x + A_2 W^2(t) \cos 2\beta y; \quad A_1 = \frac{E_1 \beta^2}{2 \alpha^2}; \quad A_2 = \frac{E_1 \alpha^2}{2 \beta^2}. \quad (19)$$

Thay (19) vào (13) và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11}W + \tilde{L}_{12}\Phi_x + \tilde{L}_{13}\Phi_y + \tilde{P}_1W^3 &= \tilde{C}_1q + \tilde{\rho}_1\ddot{W} + 2\varepsilon\tilde{\rho}_1\dot{W}; \\ \tilde{L}_{21}W + \tilde{L}_{22}\Phi_x + \tilde{L}_{23}\Phi_y &= \tilde{\rho}_2\ddot{\Phi}_x; \quad \tilde{L}_{31}W + \tilde{L}_{32}\Phi_x + \tilde{L}_{33}\Phi_y = \tilde{\rho}_2\ddot{\Phi}_y \end{aligned} \quad (20)$$

trong đó: $\tilde{L}_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ và $\tilde{P}_1, \tilde{C}_1, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$ là các hệ số đã được xác định.

3.1. Dao động riêng tuyến tính

Cho $q = 0$ và bỏ qua các thành phần phi tuyến trong (20), ta xác định được tần số dao động riêng của tấm FGM rỗng từ việc giải định thức:

$$\begin{vmatrix} \tilde{L}_{11} + \omega^2 \tilde{\rho}_1 & \tilde{L}_{12} & \tilde{L}_{13} \\ \tilde{L}_{21} & \tilde{L}_{22} + \omega^2 \tilde{\rho}_2 & \tilde{L}_{23} \\ \tilde{L}_{31} & \tilde{L}_{32} & \tilde{L}_{33} + \omega^2 \tilde{\rho}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

Nghiệm nhỏ nhất thu được từ (21) với mỗi cặp giá trị (m, n) chính là các tần số dao động riêng ω_{mn} cần tìm; từ đó ta xác định được tần số dao động cơ bản $\omega_0 = \min\{\omega_{mn}\}$.

3.2. Đáp ứng động phi tuyến

Xét tấm FGM rỗng dưới tác dụng của tải trọng uốn phân bố đều $q(t) = Q \sin \Omega t$. Hệ phương trình (20) thu về dạng:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11}W + \tilde{L}_{12}\Phi_x + \tilde{L}_{13}\Phi_y + \tilde{P}_1W^3 &= \tilde{C}_1Q \sin \Omega t + \tilde{\rho}_1\ddot{W} + 2\varepsilon\tilde{\rho}_1\dot{W}; \\ \tilde{L}_{21}W + \tilde{L}_{22}\Phi_x + \tilde{L}_{23}\Phi_y &= \tilde{\rho}_2\ddot{\Phi}_x; \quad \tilde{L}_{31}W + \tilde{L}_{32}\Phi_x + \tilde{L}_{33}\Phi_y = \tilde{\rho}_2\ddot{\Phi}_y \end{aligned} \quad (22)$$

Sử dụng (22), ta xác định được đáp ứng động lực học phi tuyến của tấm FGM rỗng. Đáp ứng động học của tấm được xác định sử dụng sử dụng phương pháp Runge-Kutta với các điều kiện ban đầu $W(0) = \Phi_x(0) = \Phi_y(0) = 0; \dot{W}(0) = \dot{\Phi}_x(0) = \dot{\Phi}_y(0) = 0$.

4. Kết quả số và thảo luận

Dựa trên lời giải giải tích được xây dựng ở trên, các tác giả đã lập code chương trình sử dụng phần mềm Matlab để tính toán đáp ứng động phi tuyến cho tấm chữ nhật FGM rỗng liên kết khớp 4 cạnh, đặt trên nền đàn hồi. Vật liệu bọt kim loại (metal foam) với các cơ tính $E_{\max} = 200 \text{ GPa}$, $\rho_{\max} = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$. Để thuận tiện, các công thức không thứ nguyên được sử dụng [23, 24]:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_{\max}}{E_{\max}}}; \quad K_0 = \frac{K_w a^4}{D_m}; \quad J_0 = \frac{K_s a^2}{D_m}; \quad D_m = \frac{E_{\max} h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (23)$$

4.1. Ví dụ kiểm chứng

Xét tấm vuông bằng vật liệu đẳng hướng ($E = E_c = 380$ GPa; $\nu = 0,3$; $e_0 = 0$) tựa khớp trên chu vi. Bảng 1 trình bày một số kết quả kiểm chứng về tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của tấm

$$\bar{\omega} = \alpha_0 h \sqrt{\rho_m / E_m}; \quad K_0 = \frac{K_w a^4}{D_m}; \quad J_0 = \frac{K_s a^2}{D_m}; \quad D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)}; \quad E_m = 70 \text{ GPa}; \quad \rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3, \text{ cho}$$

bốn trường hợp giá trị tham số nền (K_0, J_0) và các tỷ số kích thước tấm: $a/h = 5, 10, 20$.

Các kết quả tính toán dựa trên lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT) với dạng nghiệm Navier được so sánh với kết quả giải tích (dạng nghiệm Navier và Levy) của Thai và Choi [23] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến 4 ẩn số chuyển vị. Các kết quả số cho thấy, nghiệm giải tích trong bài báo phù hợp với kết quả của Thai và Choi với tất cả các giá trị tham số nền và tỷ số kích thước tấm a/h .

Bảng 1. Kiểm chứng tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm vuông đẳng hướng

K_0	J_0	Nguồn	a/h		
			5	10	20
0	0	Thai và Choi	0,4154	0,1135	0,0291
		Bài báo	0,4150	0,1133	0,0291
0	100	Thai và Choi	0,608	0,1599	0,0406
		Bài báo	0,6074	0,1597	0,0406
100	0	Thai và Choi	0,4273	0,1163	0,0298
		Bài báo	0,4268	0,1161	0,0298
100	100	Thai và Choi	0,6162	0,1619	0,0411
		Bài báo	0,6156	0,1617	0,0411

4.2. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số

Trong các khảo sát số dưới đây, đáp ứng động của tấm chữ nhật vật liệu FGM rỗng: $h = 0,01$ m; $a/h = 50$; $b/a = 1,5$; $m = n = 1$, liên kết khớp trên chu tuyến được thực hiện. Tấm đặt trên nền đàn hồi Pasternak và chịu uốn dưới tác dụng của tải cưỡng bức phân bố đều $q = 10^4 \sin \Omega t$ (Pa, s).

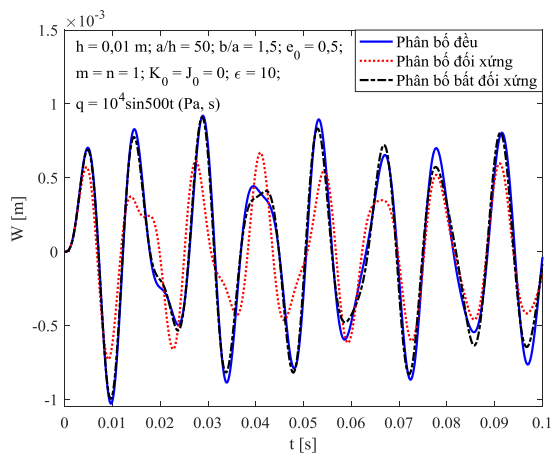
Hình 2 khảo sát đường cong tải-độ võng của tấm chữ nhật FGM rỗng ($e_0 = 0,5$; $K_0 = J_0 = 0$, $\varepsilon = 10$, $\Omega = 500$ rad/s) với ba dạng quy luật phân bố lỗ rỗng: phân bố đều ($\omega = 784,81$ rad/s), phân bố đối xứng ($\omega = 872,92$ rad/s) và phân bố bất đối xứng ($\omega = 793,29$ rad/s). Các kết quả cho thấy, tấm chữ nhật với quy luật phân bố đối xứng luôn có tần số dao động riêng lớn nhất và biên độ độ võng nhỏ nhất (độ cứng kết cấu lớn nhất); hai quy luật còn lại cho kết quả khác nhau không nhiều.

Hình 3 so sánh ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng lên đường cong tải-độ võng của tấm chữ nhật FGM rỗng ($K_0 = J_0 = 0$, $\varepsilon = 10$, $\Omega = 500$ rad/s), phân bố đối xứng: $e_0 = 0,1$; $0,5$; $0,9$. Các tần số dao động

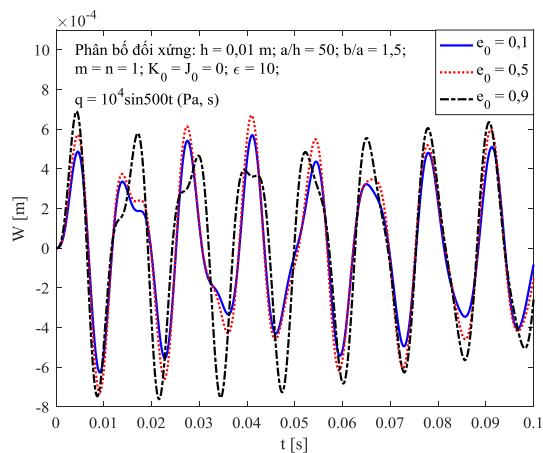
riêng tuyến tính của tấm tương ứng với 3 trường hợp hệ số lỗ rỗng: $\omega = 868,50$ rad/s; $872,92$ rad/s; $950,35$ rad/s). Một điều thú vị nhận được là với phân bố lỗ rỗng đối xứng, khi tăng hệ số lỗ rỗng e_0 thì biên độ độ võng tăng, nhưng đồng thời tần số dao động riêng của tấm cũng tăng theo.

Hình 4 so sánh ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi lên đường cong tải-độ võng của tấm chữ nhật FGM rỗng ($e_0 = 0,5$, $\epsilon = 10$, $\Omega = 500$ rad/s), phân bố đối xứng: $K_0 = J_0 = 0$; $K_0 = 100$, $J_0 = 0$; $K_0 = 100$, $J_0 = 10$. Các tần số dao động riêng tuyến tính của tấm tương ứng với 3 trường hợp hệ số nền là: $\omega = 872,92$ rad/s; $\omega = 1104,81$ rad/s và $\omega = 1369,09$ rad/s). Các kết quả trên đồ thị cho thấy ảnh hưởng của nền đàn hồi như mong đợi: khi tăng các tham số nền K_0 hoặc J_0 có tác dụng làm tăng độ cứng tổng thể của kết cấu tấm, dẫn đến tần số dao động riêng của tấm tăng và biên độ độ võng giảm.

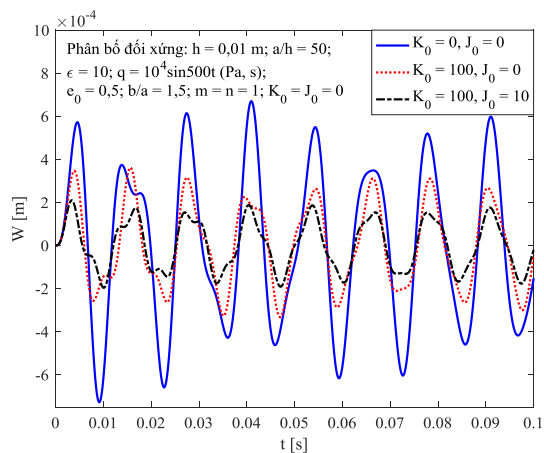
Hình 5 so sánh ảnh hưởng của tần số lực cưỡng bức lên đường cong tải-độ võng của tấm chữ nhật FGM rỗng ($K_0 = J_0 = 0$, $e_0 = 0,5$, $\epsilon = 0$), phân bố đối xứng: $\Omega = 750$ rad/s; $\Omega = 800$ rad/s; $\Omega = 850$ rad/s. Tần số dao động riêng tuyến tính của tấm là: $\omega = 872,92$ rad/s. Có thể thấy rằng, khi tần số lực cưỡng bức gần với giá trị của tần số dao động riêng của tấm, hiện tượng phách điều hòa xảy ra làm tăng nhanh biên độ độ võng. Tần số lực cưỡng bức càng gần với giá trị của tần số dao động riêng thì biên độ độ võng càng lớn và chiều dài phách càng tăng.



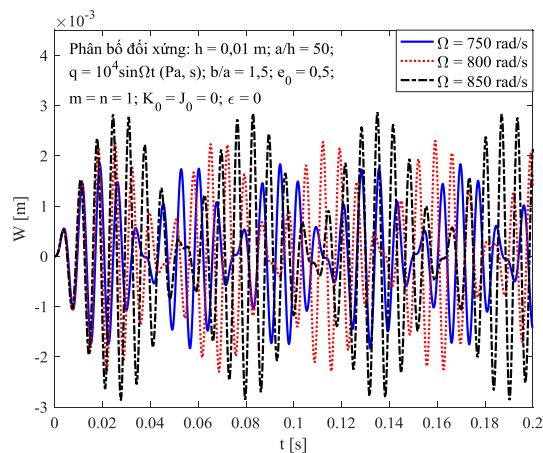
Hình 2. Đường cong tải-độ võng của tấm FGM rỗng với các quy luật phân bố lỗ rỗng



Hình 3. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng, e_0 lên đường cong tải-độ võng của tấm FGM rỗng



Hình 4. Ảnh hưởng của hệ số nền lên đường cong tải-độ võng của tấm FGM rỗng



Hình 5. Ảnh hưởng của tần số lực cưỡng bức lên hiện tượng phách điều hòa của tấm FGM rỗng

5. Kết luận

Bài báo xây dựng cơ sở lý thuyết và thuật toán phân tích đáp ứng động lực học phi tuyến tấm FGP liên kết khớp bốn cạnh, đặt trên nền đàn hồi. Bằng việc sử dụng hệ quy chiếu là mặt trung hoà và phương pháp Galerkin, đã nhận được hệ phương trình khảo sát đáp ứng động phi tuyến của tấm. Chương trình tính viết trên nền Matlab được kiểm chứng cho tấm bằng vật liệu đẳng hướng cho thấy đủ độ tin cậy. Các khảo sát số được thực hiện đã đánh giá được ảnh hưởng của quy luật phân bố, hệ số lỗ rỗng, hệ số nền đàn hồi, tần số lực cưỡng bức đến đáp ứng động lực học của tấm FGP. Đây là nghiên cứu ban đầu cho những nghiên cứu tiếp theo về ứng xử của các kết cấu bằng vật liệu FGP chứa chất lỏng trong các lỗ rỗng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Chen, D., J. Yang, and S. Kitipornchai, *Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam*. Composite Structures, 2015. **133**: p. 54-61.
- [2] Magnucki, K., M. Malinowski, and J. Kasprzak, *Bending and buckling of a rectangular porous plate*. Steel and Composite Structures, 2006. **6**(4): p. 319-333.
- [3] Chen, D., J. Yang, and S. Kitipornchai, *Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams*. International Journal of Mechanical Sciences, 2016. **108**: p. 14-22.
- [4] Toan Thang, P., T. Nguyen-Thoi, and J. Lee, *Mechanical stability of metal foam cylindrical shells with various porosity distributions*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020. **27**(4): p. 295-303.
- [5] Tú, T.M., *Phân tích dao động riêng của tấm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCVXD)-ĐHXD, 2018. **12**(7): p. 9-19.
- [6] Tu, T.M., et al., *Nonlinear buckling and post-buckling analysis of imperfect porous plates under mechanical loads*. Journal of Sandwich Structures & Materials, 2020. **22**(6): p. 1910-1930.
- [7] Foroutan, K., A. Shaterzadeh, and H. Ahmadi, *Nonlinear static and dynamic hygrothermal buckling analysis of imperfect functionally graded porous cylindrical shells*. Applied Mathematical Modelling, 2020. **77**: p. 539-553.
- [8] Nam, V.H. and N.-T. Trung, *Buckling and postbuckling of porous cylindrical shells with functionally graded composite coating under torsion in thermal environment*. Thin-Walled Structures, 2019. **144**: p. 106253.
- [9] Long, N.V., T.M. Tú, and V.T.T. Trang, *Phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau có xét đến vị trí thực của mặt trung hoà*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCVXD)-ĐHXD, 2020. **14**(4V): p. 1-15.
- [10] Zhang, D.-G., *Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory*. Composite Structures, 2013. **100**: p. 121-126.
- [11] She, G.-L., X. Shu, and Y.-R. Ren, *Thermal buckling and postbuckling analysis of piezoelectric FGM beams based on high-order shear deformation theory*. Journal of Thermal Stresses, 2017. **40**(6): p. 783-797.

- [12] Babaei, H., M. Eslami, and A. Khorshidvand, *Thermal buckling and postbuckling responses of geometrically imperfect FG porous beams based on physical neutral plane*. Journal of Thermal Stresses, 2020. **43**(1): p. 109-131.
- [13] Kim, N.-I. and J. Lee, *Geometrically nonlinear isogeometric analysis of functionally graded plates based on first-order shear deformation theory considering physical neutral surface*. Composite Structures, 2016. **153**: p. 804-814.
- [14] Hải, L.T., et al., *Phân tích tĩnh tải bằng vật liệu fgm xoắn trên nền đàn hồi Pasternak theo phương pháp chuyển vị có kể đến tính phi tuyến hình học và vị trí mặt trung hòa*. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCCNXD)-ĐHXD, 2020. **14**(5V): p. 166-179.
- [15] Hao, Y., W. Zhang, and J. Yang, *Nonlinear dynamics of a FGM plate with two clamped opposite edges and two free edges*. Acta Mechanica Solida Sinica, 2014. **27**(4): p. 394-406.
- [16] Dinh Duc, N., et al., *Nonlinear dynamic response and vibration of imperfect shear deformable functionally graded plates subjected to blast and thermal loads*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2017. **24**(4): p. 318-329.
- [17] Phung-Van, P., et al., *Isogeometric nonlinear transient analysis of porous FGM plates subjected to hygro-thermo-mechanical loads*. Thin-Walled Structures, 2020. **148**: p. 106497.
- [18] Barati, M.R. and A.M. Zenkour, *Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions*. Composite Structures, 2017. **182**: p. 91-98.
- [19] Larbi, L.O., et al., *An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams#*. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2013. **41**(4): p. 421-433.
- [20] Reddy, J.N., *Theory and analysis of elastic plates and shells*. 2006: CRC press.
- [21] Duc, N.D., *Nonlinear dynamic response of imperfect eccentrically stiffened FGM double curved shallow shells on elastic foundation*. Composite Structures, 2013. **99**: p. 88-96.
- [22] Duc, N.D. and T.Q. Quan, *Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments*. Mechanics of Composite Materials, 2012. **48**(4): p. 435-448.
- [23] Thai, H.-T. and D.-H. Choi, *A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation*. Composites Science and Technology, 2011. **71**(16): p. 1850-1858.
- [24] Zenkour, A.M., *The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations*. International journal of mechanical sciences, 2009. **51**(11-12): p. 869-880.